

. DM02.B : La formule d'Al-Kashi.

Al Kashi doit son nom à sa ville natale, Kashan en Iran. Il grandit dans la pauvreté durant une période trouble où la région subit les conquêtes militaires de l'émir Timur Lang, dit Tamerlan (1370 ; 1405). Après la mort de Timur, les conditions s'améliorent grandement. Son fils et successeur, le Shah Rokh soutient fortement les intérêts artistiques et intellectuels et très tôt, Al Kashi se consacre aux mathématiques et à l'astronomie. Le 2 juin 1406 marque par une éclipse de lune une de ses premières observations notables. A cette époque, les scientifiques effectuent leurs recherches à la cour de rois ou de princes. A Samarkand, al Kashi vit sous la protection du prince Ulugh-Beg (1394 ; 1449) qui a fondé une Université comprenant une soixantaine de scientifiques qui étudient la théologie et les sciences. Il devient Premier Directeur du nouvel observatoire de Samarkand et s'adonne pleinement à ses travaux tout en s'assurant d'être à l'abri du besoin.

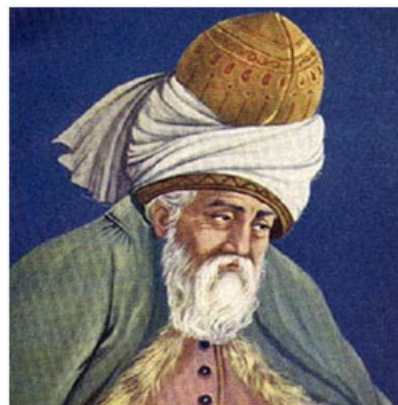


FIGURE 2.2 – Al-Kashi

De nombreux ouvrages d'Al Kashi ainsi que certaines lettres écrites à son père ont survécu.

Dans le traité d'astronomie Khaqani Zij (1413-1414), il donne des tables trigonométriques qui proposent des valeurs à quatre chiffres (en notation sexagésimale) de la fonction sinus. On y trouve aussi une correspondance entre différents systèmes de coordonnées sur la sphère céleste.

Al Kashi donne également des tables des éclipses et des tables de visibilité de la lune.

Ses nombreux travaux en astronomie lui vaudront d'être surnommé plus tard le deuxième Ptolémée.

Dans son Traité sur le cercle (juillet 1424), Al Kashi calcule le rapport de la circonférence à son rayon pour obtenir une valeur approchée de 2π avec une précision jamais atteinte : $2\pi \approx 6,283\ 185\ 307\ 179\ 586\ 5$

C'est dans son principal traité Miftah al hisab (Clé de l'arithmétique, 2 mars 1427) qu'Al Kashi explique l'usage des nombres sexagésimaux (système de numération en base 60) hérités des astronomes babyloniens. Cet imposant ouvrage est destiné aux chercheurs de Samarkand étudiant l'astronomie, l'architecture, la comptabilité ou le commerce.

Al Kashi y décrit également des calculs d'aires et de volumes comme ceux du dôme en forme de coquille d'un qubba (monument funéraire destiné aux nobles).

Al Kashi effectue des calculs de racines n -ième par un algorithme qui est un cas particulier d'une méthode donnée 400 ans plus tard par Paolo Ruffini (1765 ; 1822) et William Horner (1787 ; 1837).

Il propose aussi des calculs approchés de racines n -ième d'un nombre et expose une technique déjà connue d'Omar Khayyam (1048 ; 1123 ?) et appelée aujourd'hui le triangle de Pascal pour effectuer des calculs du type $(a + b)^n$.

Il laisse par ailleurs son nom à un théorème qui généralise le théorème de Pythagore pour un triangle quelconque et qui s'exprime aujourd'hui de la façon suivante :

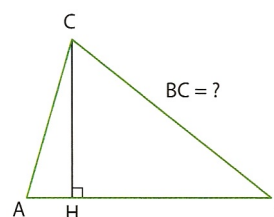
Dans un triangle ABC de côtés de longueurs a, b, c : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$

L'objet de ce DM est de démontrer cette formule.

1. Pour un triangle ABC rectangle en A, comment peut-on calculer BC en fonction de AB et AC ?

On cherche une formule qui permettrait de calculer BC pour d'autres

triangles. On supposera dans la suite que le triangle ABC a ses trois angles aigus. On note Δ la différence $\Delta = AB^2 + AC^2 - BC^2$ et on nomme H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).



2. (a) Justifier que $BC^2 = HB^2 + HC^2$ et $AC^2 = HA^2 + HC^2$
(b) En déduire que $\Delta = AB^2 + (HA + HB) \times (HA - HB)$ puis que $\Delta = AB \times (AB + HA - HB)$.
3. En déduire que $\Delta = 2 \times AB \times AH$ puis que $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$. Cette formule est la formule d'Al-Kashi.
4. Applications
 - (a) Si $AB = 4$, $AC = 6$ et $\widehat{BAC} = 60^\circ$, calculer BC.
 - (b) Si $AB = 5$, $AC = 8$ et $BC = 12$, calculer une valeur approchée de $\widehat{BAC}$ au dixième de degré près.
 - (c) Justifier que, si on connaît deux côtés d'un triangle et l'angle formé par ces deux côtés, on peut trouver le 3^e coté puis les autres angles.